Corrigé du contrôle 1

Solution de l'exercice 1.

1. L'ordonnée à l'origine de f est $c = -4$ car $f(0) = -2 \times 0^2 + 9 \times 0 - 4 = -4$.
2. Le coefficient $a = -2$ étant strictement négatif, on en déduit que la parabole $\mathscr{P}$ associée à f est orientée « vers le bas ».
3. De la question précédente, on en déduit que l'extremum est un maximum.
4. L'abscisse de ce maximum est donnée par la formule $x_0 = \frac{-b}{2a}$. Or ici $b = 9$ et $a = -2$. On en déduit donc que
$$x_0 = \frac{-9}{2 \times (-2)} = \frac{9}{4} = 2,25.$$
5. L'ordonnée de ce maximum est l'image de x_0 par f, c'est-à-dire
$$\begin{aligned} f(x_0) = f\left(\frac{9}{4}\right) &= -2 \times \left(\frac{9}{4}\right)^2 + 9 \times \frac{9}{4} - 4 \\ &= -2 \times \frac{81}{16} + \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{81}{8} + \frac{65}{4} = -\frac{81}{8} + \frac{130}{8} = \frac{49}{8} = 6,125. \end{aligned}$$
6. A l'aide des questions précédentes, on en déduit que le tableau de variation de f est donné par :

x	$-\infty$		2,25		$+\infty$
$f(x)$			6,125		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Solution de l'exercice 2.

1. Faux. Le coefficient a est strictement positif car la parabole $\mathscr{C}_g$ est orientée « vers le haut ». Par conséquence le coefficient a ne peut pas être égal à -4.
2. Vrai. La parabole coupe l'axe des ordonnées au point $(0; 4)$ ce qui implique que $g(0) = c = 4$.
3. Faux. Graphiquement, l'abscisse du sommet de la parabole vaut 5 et n'est pas négative.
4. Faux. La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points (graphiquement $(2; 0)$ et $(8; 0)$) en conséquence on sait que l'équation $g(x) = 0$ possède deux solutions. Cette dernière affirmation n'est possible si et seulement si le discriminant associé est strictement positif. Donc le discriminant ne peut pas être négatif.
5. Vrai. La parabole coupe l'axe des abscisses au point $(2; 0)$ donc $g(2) = 0$ et donc 2 est une racine du polynôme.

Solution de l'exercice 3.

1. Par définition, le coût fixe est donné par

$$C(0) = 0^2 - 4 \times 0 + 20 = 20.$$

2. La relation est linéaire : pour une seule montre la recette sera de 20 €, pour deux montres la recette sera de 40 €, pour trois montres la recette sera de 3×20 € etc. Par conséquent, la recette $R(x)$ pour la vente de x montres sera de

$$R(x) = 20x.$$

3. Par définition,

$$B(x) = R(x) - C(x).$$

Or par la question précédente, $R(x) = 20x$ et d'après l'énoncé, $C(x) = x^2 - 4x + 20$. Par conséquent,

$$B(x) = 20x - \left(x^2 - 4x + 20\right) = 20x - x^2 + 4x - 20 = -x^2 + 20x + 4x - 20.$$

Conclusion, on obtient bien

$$B(x) = -x^2 + 24x - 20.$$

4. En prenant $x = 24$, on a d'après la question précédente,

$$B(24) = -24^2 + 24 \times 24 - 20 = -24^2 + 24^2 - 20 = -20.$$

On observe notamment que

$$B(24) < 0.$$

Cela signifie que si l'entreprise vend 24 montre, le coût de production est supérieur à la recette et donc le bénéfice est négatif. L'entreprise vend à perte dans ce cas.

5. On souhaite que le bénéfice soit de 60 €autrement dit que $B(x) = 60$. Ainsi, par la question 3,

$$-x^2 + 24x - 20 = 60 \qquad \Leftrightarrow \qquad -x^2 + 24x - 20 - 60 = 0.$$

Conclusion, l'équation obtenue est

$$-x^2 + 24x - 80 = 0.$$

6. Dans $-x^2+24x-80$, on a $a = -1$, $b = 24$ et $c = -80$. Ainsi, le discriminant de $-x^2+24x-80$ est donné par

$$\Delta = b^2 - 4ac = 24^2 - 4 \times (-1) \times (-80) = 576 - 320 = 256.$$

7. Par la question précédente, on en déduit les deux solutions x_1 et x_2 de l'équation $-x^2 + 24x - 80 = 0$ données par

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-24 + \sqrt{256}}{-2} = \frac{-24 + 16}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

et

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-24 - \sqrt{256}}{-2} = \frac{-24 - 16}{-2} = \frac{-40}{-2} = 20.$$

8. Par la question 5, pour réaliser un bénéfice exactement égal à 60 €, l'entreprise doit produire et vendre x montres où x est une solution de $-x^2 + 24x - 80 = 0$ et donc d'après la question précédente, $x = 4$ ou $x = 20$. Conclusion, l'entreprise doit produire et vendre 4 montres ou 20 montres pour réaliser un bénéfice exactement égal à 60 €.
9. D'après le cours, on sait que l'abscisse x_0 du sommet est donné par
$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$
Or dans la parabole $B(x) = -x^2 + 24x - 20$, on a $a = -1$, $b = 24$ et $c = -20$. Ainsi,
$$x_0 = -\frac{24}{-2} = 12.$$
10. Puisque $a = -1$, la parabole est orientée vers le bas autrement dit x_0 est l'abscisse d'un maximum. Concrètement, x_0 correspond au nombre de montres que l'entreprise doit produire et vendre pour faire un bénéfice maximal.
11. Le bénéfice maximal est obtenu en vendant $x_0 = 12$ montres. Alors le bénéfice sera de
$$B(12) = -12^2 + 24 \times 12 - 20 = -144 + 288 - 20 = 144 - 20 = 124.$$